تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $f: A \to B$ یک تابع باشد. در این صورت f را یک به یک گوئیم هرگاه

$$\forall a, b \in A \quad f(a) = f(b) \to a = b$$

تعریف: تابع $f: A \to B$ را پوشا گوئیم هرگاه $f(A) = B$،

به عبارت دیگر برای هر $b \in B$، $a \in A$ چنان موجود باشد که $f(a) = b$.

تعریف. تابع $f: A \to B$ را دوسوئی گوئیم هرگاه f هم یک به یک و هم پوشا باشد.

تابع دوسوئی را هم توانی نیز می‌گوئیم. همچنین اگر $f: A \to B$ یک هم توانی باشد گوئیم A با B هم توان است و می‌نویسیم $A \sim B$.

قضیه. رابطه‌ی هم توانی مجموعه‌ها یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. باید نشان دهیم هم توانی مجموعه‌ها انعکاسی، تقارنی و تعدی است.

الف. (انعکاسی) برای این منظور فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه باشد. به وضوح تابع $I: A \to A$ تابعی دوسوئی است. بنابراین $A \sim A$.

$I(a) = a$

ب. (تقارنی) فرض کنید $A \sim B$. بنابراین تابع دوسوئی $f: A \to B$ موجود است. در این صورت f وارون پذیر است و $f^{-1}: B \to A$ دوسوئی است پس $B \sim A$.

ج. (تعدی) فرض کنید A، B و C مجموعه‌هایی باشند که $A \sim B$ و $B \sim C$.

بنابراین تابع دوسوئی $g: B \to C$ و تابع دوسوئی $f: A \to B$ موجود است.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

به راحتی می‌توان دید تابع $g \circ f: A \to C$ یک تابع دوسوئی است. بنابراین $A \sim C$.

پس رابطه‌ی هم توانی مجموعه‌ها یک رابطه‌ی هم ارزی است.

مسأله. نشان دهید $\mathbb{N} \sim \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

حل. قرار می‌دهیم $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ و تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \to A \\ f(n) = n+1 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید f یک تابع دوسوئی است. پس $\mathbb{N} \sim A$.

در این مسأله ثابت کرده‌ایم $\mathbb{N}$ با زیرمجموعه‌ای سره از خودش هم توان است.

مسأله. نشان دهید $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

حل. قرار می‌دهیم $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

می‌توان دید تابع f دوسوئی است. پس $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. توجه کنید:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

همان گونه که در مثال بالا ملاحظه میشود، $\mathbb{Z}$ با زیرمجموعه ای سره از خودش هم توان است.

درصورتی که مجموعه ی $\{1,2,3,4,5\}$ با هیچ زیرمجموعه ی سره از خودش نمی تواند هم توان باشد.

تعریف. مجموعه ی A را نامتناهی گوئیم هرگاه A با زیرمجموعه ای سره از خودش هم توان باشد. در غیر اینصورت A را متناهی می گوئیم.

مثال. $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نامتناهی اند. زیرا در دو مثال بالا نشان دادیم هر کدام با زیرمجموعه ای سره از خودشان هم توان هستند.

مثال. مجموعه ی تهی متناهی است. چون زیرمجموعه ی سره ندارد.

مثال. هر مجموعه ی تک عضوی متناهی است. برای این منظور مجموعه ی $A=\{a\}$ را در نظر بگیرید. اما تنها زیرمجموعه ی سره ی A، مجموعه ی تهی است و البته $\emptyset \nsim A$.

پس A متناهی است.

مثال. بازه ی $(0,1)$ نامتناهی است. برای این منظور تابع

$$f:(0,1)\longrightarrow(0,\tfrac{1}{2})$$

$$f(x)=\frac{x}{2}$$

را در نظر می گیریم. به وضوح f دوسوئی است. بنابراین $(0,1)\sim(0,\tfrac{1}{2})$.

یعنی $(0,1)$ با زیرمجموعه ای سره از خودش هم توان است و در نتیجه $(0,1)$ نامتناهی است.

تمرین. نشان دهید بازه ی $[-2,3)$ نامتناهی است.

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، در این صورت B را ابرمجموعه‌ی A می‌نامیم.

تعریف معادل برای نامتناهی بودن یک مجموعه.

همان گونه که بیان شده N مجموعه‌ای است نامتناهی - زیرا N با زیرمجموعه‌ای سره‌ی خودش یعنی $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ همتوان است.

این هم توانی در زیر نشان داده شده است.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
$$A = \{\ \ 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

با افزودن 1 به A تابع بالا بصورت زیر خواهد بود.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

ملاحظه می‌کنید که تابع اخیر تابعی است یک به یک و غیرپوشا از N به خودش.

تعریف. مجموعه‌ی A نامتناهی است اگر و تنها اگر تابع یک به یک و غیرپوشای $f: A \to A$ موجود باشد.

قضیه. هر ابرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

اثبات. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی بوده و Y ابرمجموعه‌ی آن باشد. یعنی

$X \subseteq Y$.

از این که X نامتناهی است لذا تابع یک به یک و غیرپوشای $f: X \to X$ موجود است.

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$g: Y \to Y$$

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & y \in X \\ y & y \in Y - X \end{cases}$$

نشان می‌دهیم g یک به یک و غیرپوشاست.

الف) g یک به یک است. برای این منظور فرض کنید $y_1, y_2 \in Y$ و $g(y_1) = g(y_2)$.

حالتهای مختلف زیر ممکن است رخ دهد.

(۱) $y_1, y_2 \in X$. در این صورت

$$g(y_1) = g(y_2) \to f(y_1) = f(y_2) \xrightarrow[1-1]{f} y_1 = y_2$$

(۲) $y_1, y_2 \in Y - X$. در این صورت

$$g(y_1) = g(y_2) \longrightarrow y_1 = y_2$$

(۳) $y_1 \in X$ و $y_2 \in Y - X$. در این صورت:

$$g(y_1) = f(y_1) \in f(X) \subseteq X \longrightarrow g(y_1) \in X$$
$$g(y_2) = y_2 \in Y - X \longrightarrow g(y_2) \notin X$$
$\Rightarrow$ خ

پس حالت سوم اصلاً رخ نمی‌دهد.

بنابراین g یک به یک است.

ب) $g: Y \to Y$ پوشا نیست. می‌دانیم $Y = X \cup (Y - X)$. بنابراین

$$g(Y) = g(X \cup (Y-X)) = g(X) \cup g(Y-X)$$
$$= f(X) \cup (Y-X)$$
$$\subsetneqq X \cup (Y-X) = Y$$

بنابراین $g(Y) \neq Y$ و لذا g پوشا نیست.

پس Y نامتناهی است.

نتیجه. هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

اثبات. فرض کنید Y متناهی باشد و $X \subseteq Y$. در این صورت X متناهی است.

زیرا در غیر اینصورت (فرض خلف) X نامتناهی است و لذا ابرمجموعه‌ی آن یعنی Y نیز نامتناهی خواهد بود که تناقض است. پس X متناهی است.

قضیه. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی هم‌توان بوده و X نامتناهی باشد. در این صورت Y نیز نامتناهی است.

اثبات. از این که $X \sim Y$ لذا تابع دوسوئی $h: X \to Y$ موجود است. همچنین X نامتناهی است. بنابراین تابع یک به یک غیرپوشای $f: X \to X$ موجود است.

اکنون تعریف می‌کنیم $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

$$g : Y \xrightarrow{h^{-1}} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} Y$$

الف) از این که f، h و h^{-1} همگی یک به یک می باشند، لذا ترکیبشان یعنی

$g = h \circ f \circ h^{-1}$ نیز یک به یک است.

ب) g پوشا نیست، فرض کنید (فرض خلف) چنین نباشد. یعنی g پوشا است،

از این که $g = h \circ f \circ h^{-1}$، لذا $f = h^{-1} \circ g \circ h$. حال از این که h، g و h^{-1} همگی پوشا هستند، لذا ترکیبشان یعنی $f = h^{-1} \circ g \circ h$ نیز پوشا است که

تناقض است. بنابراین g پوشا نیست،

پس Y نامتناهی است،

توجه: $g = h \circ f \circ h^{-1} \rightarrow h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ (h \circ f \circ h^{-1}) \circ h$

$$= f$$

نتیجه: اگر $Y \sim X$ و X نامتناهی باشد، آنگاه Y نیز نامتناهی است.

قضیه. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی بوده و $x_0 \in X$. در این صورت

$X - \{x_0\}$ نیز نامتناهی است.

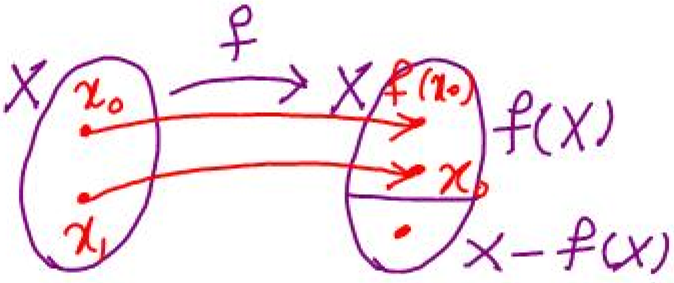
اثبات. از این که X نامتناهی است بنابراین تابع یک به یک و غیر پوشای

$f: X \rightarrow X$ موجود است، اکنون می خواهیم تابعی یک به یک و غیر پوشا مانند

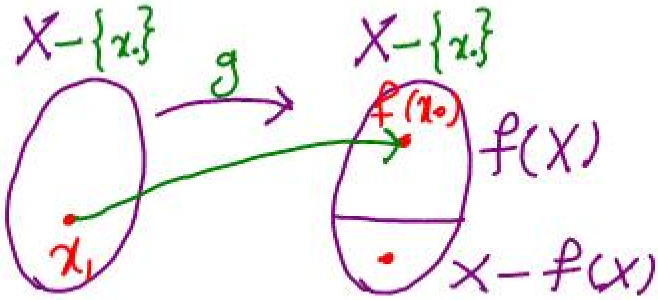
$g: X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ پیدا کنیم،

برای این منظور دو حالت زیر را در نظر می گیریم

حالت اول: $x_0 \in f(X)$.



قبل از حذف x_0



بعد از حذف x_0

در این حالت تعریف می‌کنیم

$$g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_1\\ f(x_0) & x=x_1\end{cases}$$

که در آن $f(x_1)=x_0$.

- g یک به یک است. برای این منظور فرض کنید $g(a)=g(b)$.

الف: $a\neq x_1$ و $b\neq x_1$. در این حالت

$$g(a)=g(b)\longrightarrow f(a)=f(b)\xrightarrow[1-1]{f} a=b$$

ب: $a=x_1$ و $b=x_1$. در این حالت بوضوح $a=b$.

ج: $a\neq x_1$ و $b=x_1$. در این حالت:

$$g(a)=g(b)\longrightarrow f(a)=f(x_0)\xrightarrow[1-1]{f} a=x_0 \quad \times$$

چون $a\in X-\{x_0\}$.

بنابراین g یک به یک است.

- g پوشا نیست.

از این که $f: X \to X$ غیرپوشاست، لذا $c \in X - f(X)$ موجود است.

حال چنانچه g پوشا باشد (فرض خلف)، $d \in X - \{x_0\}$ چنان موجود است

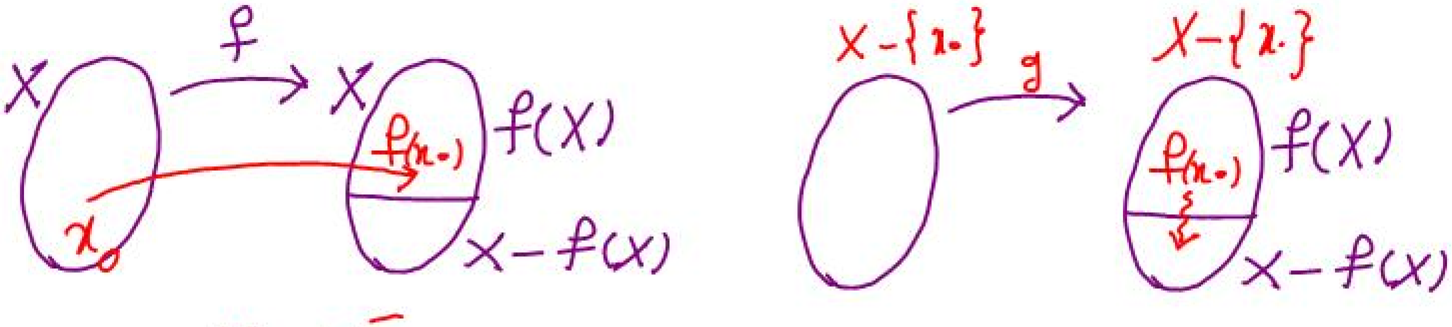
که $g(d) = c$.

- اگر $d \neq x_0$ آنگاه $c = g(d) = f(d) \in f(X)$ ∴ $\times$.

- اگر $d = x_0$ آنگاه $c = g(d) = f(x_0) \in f(X)$. $\times$

بنابراین g غیرپوشاست.

حالت دوم. $x_0 \notin f(X)$.



قبل از حذف x_0

بعد از حذف x_0

در این حالت تعریف می‌کنیم:

$$g: X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\}$$

$$g(x) = f(x)$$

- g یک به یک است. زیرا f یک به یک است.

- g پوشا نیست.

فرض کنید g پوشا باشد، در این صورت $a \in X-\{x_0\}$ موجود است که $g(a) = f(x_0)$. یعنی $f(a) = f(x_0)$. حال از یک به یک بودن f نتیجه می‌شود $a = x_0$ که تناقض است. (چون $a \in X-\{x_0\}$)

پس g غیرپوشا است و لذا

در هر حالت $X-\{x_0\}$ نامتناهی است.

نتیجه. اگر X متناهی باشد و $x_0 \notin X$ آنگاه $X \cup \{x_0\}$ متناهی است.

اثبات. فرض کنید $X \cup \{x_0\}$ نامتناهی باشد. در این صورت بنا به قضیه قبل $(X \cup \{x_0\}) - \{x_0\}$ نیز نامتناهی خواهد بود. یعنی X نامتناهی است. X.

تعریف. تعریف می‌کنیم $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ که در آن $k \in \mathbb{N}$.

مسئله. برای هر $k \in \mathbb{N}$، N_k متناهی است.

حل. به طریق استقراء مسئله را اثبات می‌کنیم. قبلاً بیان شد که هر مجموعه‌ی تک عضوی متناهی است. پس $N_1 = \{1\}$، متناهی است.

اکنون فرض کنید N_k متناهی باشد. $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. بنا به نتیجه‌ی بالا

$N_{k+1} = N_k \cup \{k+1\}$ نیز متناهی خواهد بود. پس برای هر k، N_k مجموعه‌ای است متناهی.

قضیه. مجموعه‌ی X متناهی است اگر و تنها اگر $X=\emptyset$ یا به ازای یک k ، $X\sim \mathbb{N}_k$.

اثبات. به وضوح $\emptyset$ متناهی است. همچنین اگر به ازای یک k ، $X\sim\mathbb{N}_k$ آنگاه بنا به مثال‌های قبل $\mathbb{N}_k$ و با استفاده از قضیه‌ی از قبل، X نیز متناهی خواهد بود.

برعکس. فرض کنید X متناهی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $X=\emptyset$ یا $X\sim\mathbb{N}_k$.

برای این منظور فرض کنید $X\neq\emptyset$ و برای هر k ، $X\nsim\mathbb{N}_k$ و نشان می‌دهیم X نامتناهی است.

$X\neq\emptyset$ بنابراین $x_1\in X$ موجود است. چون $\{x_1\}\sim\mathbb{N}_1$ و X با هیچ $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک نیست لذا $X\neq\{x_1\}$. به عبارت دیگر $X-\{x_1\}\neq\emptyset$.

فرض کنید $x_2\in X-\{x_1\}$. ادعا می‌کنیم $X\neq\{x_1,x_2\}$. زیرا اگر $X=\{x_1,x_2\}$ آنگاه $X\sim\mathbb{N}_2$ که تناقض است پس $X\neq\{x_1,x_2\}$ لذا $x_3\in X-\{x_1,x_2\}$ موجود است. پس در هر مرحله و برای هر k ، $x_k\in X-\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}$ موجود است.

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$f: X\longrightarrow X$$
$$x_k \rightsquigarrow x_{k+1}$$

به وضوح f یک به یک و غیر پوشاست. (برای هر $x\in X$ ، $f(x)\neq x_1$)

و بنا به تعریف X نامتناهی خواهد بود.

مسأله. نشان دهید

الف. $(0,1) \sim (2,5)$

ب. $(a,b) \sim (c,d)$

ج. $(-1,1) \sim \mathbb{R}$

حل. الف. تعریف می‌کنیم $f:(0,1) \longrightarrow (2,5)$

$$x \rightsquigarrow 3x+2$$

به راحتی می‌توان دید f یک به یک و پوشا است. پس $(0,1) \sim (2,5)$.

ب. تعریف می‌کنیم

$$f:(a,b) \longrightarrow (c,d)$$

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

می‌توان بررسی کرد که این تابع دوسویی است. پس $(a,b) \sim (c,d)$.

ج. به وضوح تابع $\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ دوسویی است. پس $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$. از طرفی بنا به قسمت (ب)، $(-1,1) \sim (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، اما رابطه‌ی هم‌توانی دارای خاصیت هم‌ارزی است. پس بنا به خاصیت تعدی،

$(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

توجه: می‌توانستیم مستقیماً تابع دوسویی $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیریم.
$$f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$$

مسأله. ثابت کنید:

الف) $(0,1] \sim (2,6]$

ب) $(0,1] \sim [0,1)$

ج) $(2,5] \sim [5,10)$

حل. تابع

$$f:(0,1] \longrightarrow (2,6]$$

$$f(x) = 4x+2$$

تابعی دوسوئی است. پس $(0,1] \sim (2,6]$.

ب. تعریف می‌کنیم

$$f:(0,1] \longrightarrow [0,1)$$
$$f(x) = 1-x$$

این تابع نیز دوسوئی است. بنابراین $(0,1] \sim [0,1)$.

توجه: در این مسأله می‌خواهیم $f(0)=1$ و $f(1)=0$. فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$ و پارامترهای a و b را می‌یابیم:

$$f(0)=1 \longrightarrow a\times 0+b=1 \longrightarrow b=1$$
$$f(1)=0 \longrightarrow a\times 1+b=0 \longrightarrow a=-b=-1$$

بنابراین $f(x)=ax+b=-x+1$.

ج. می‌خواهیم تابع خطی $f:(2,5] \longrightarrow [5,10)$ را چنان بیابیم که f دوسوئی باشد.

پس کافی است $f(2)=10$ و $f(5)=5$ ،

قرار می‌دهیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$\begin{aligned} f(2)=10 &\longrightarrow 2a+b=10 \\ f(5)=5 &\longrightarrow 5a+b=5 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} a=-\frac{5}{3} \\ b=\frac{40}{3} \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{40}{3}$ تابعی است دوسوئی بین $(2,5]$ و

$[5,10)$. بنابراین $[5,10)\sim(2,5]$ ،

قضیه. فرض کنید X، Y، Z و W مجموعه‌هایی باشند که $X\sim Y$ ، $Z\sim W$ ،

$X\cap Z=\emptyset$ و $Y\cap W=\emptyset$. در این صورت $X\cup Z\sim Y\cup W$.

اثبات. از این که $X\sim Y$ و $Z\sim W$ لذا توابع دوسوئی $f:X\to Y$ و $g:Z\to W$

موجودند. اینک تعریف می‌کنیم:

$$h: X\cup Z\longrightarrow Y\cup W$$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in X \\ g(x) & x\in Z \end{cases}$$

الف. h یک به یک است، برای این منظور فرض کنید $h(a)=h(b)$. می‌خواهیم

ثابت کنیم $a=b$. برای این منظور حالات مختلف زیر را در نظر می‌گیریم.

الف. $a,b\in X$. در این صورت

$$h(a)=h(b)\longrightarrow f(a)=f(b)\xrightarrow{1-1\ f} a=b.$$

ب) $a,b\in Z$. در این صورت

$h(a)=h(b) \longrightarrow g(a)=g(b) \xrightarrow{1-1\ g} a=b$

ج. $a\in X$ و $b\in Z$. در این صورت

$h(a)=h(b) \longrightarrow f(a)=g(b)$

از این که $f(a)\in Y$ و $g(b)\in W$ ، لذا $f(a)=g(b)\in Y\cap W=\emptyset$ $\times$.

پس این حالت رخ نمی‌دهد و لذا h یک به یک است.

اکنون نشان می‌دهیم h پوشاست.

برای این منظور فرض کنید $b\in Y\cup W$ دلخواه باشد. در این صورت

$b\in Y$ یا $b\in W$.

اگر $b\in Y$ آنگاه با توجه به این که $f: X\longrightarrow Y$ پوشاست، لذا $a\in X$
چنان موجود است که $f(a)=b$. در این صورت $h(a)=f(a)=b$

و در حالتی که $b\in W$ ، بواسطه‌ی پوشا بودن $g: Z\longrightarrow W$ ، $a\in Z$ چنان
موجود است که $g(a)=b$. در این حالت نیز $h(a)=g(a)=b$. پس در هر
حالت h پوشاست.

بنابراین $h: X\cup Z\longrightarrow Y\cup W$ دوسویی است و در نتیجه $X\cup Z\sim Y\cup W$.

قضیه. فرض کنید X ، Y ، Z و W مجموعه‌هایی باشند که $X\sim Y$ و $Z\sim W$.
در این صورت $X\times Z\sim Y\times W$.

اثبات. از این که $Y \sim X$ لذا تابع دوسوئی $f: X \longrightarrow Y$ موجود است.
همچنین $Z \sim W$. بنابراین تابع دوسوئی $g: Z \longrightarrow W$ وجود دارد. اینک تعریف می‌کنیم:

$$h: X \times Z \longrightarrow Y \times W$$
$$h(x, z) = (f(x), g(z))$$

الف. h یک به یک است.

$$h(x, z) = h(x', z') \longrightarrow (f(x), g(z)) = (f(x'), g(z'))$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(x') \xrightarrow[1-1]{f} x = x' \\ g(z) = g(z') \xrightarrow[1-1]{g} z = z' \end{cases} \Rightarrow (x, z) = (x', z')$$

پس h یک به یک است.

ب. h پوشاست. برای این منظور فرض کنید $(y, w) \in Y \times W$ دلخواه باشد. در این صورت $y \in Y$ و $w \in W$. از پوشا بودن $f: X \longrightarrow Y$ نتیجه می‌شود $x \in X$ موجود است که $f(x) = y$.

به همین صورت $w \in W$ و $g: Z \longrightarrow W$ پوشاست. بنابراین $z \in Z$ موجود است که $g(z) = w$. اکنون $(x, z) \in X \times Z$ و بعلاوه

$$h(x, z) = (f(x), g(z)) = (y, w)$$

پس h پوشا و در نتیجه دوسوئی است. بنابراین

$$X \times Z \sim Y \times W.$$

تعریف: مجموعه‌ی X را شمارای نامتناهی گوییم هرگاه $\mathbb{N} \sim X$.

تعریف: مجموعه‌ی X را شمارا گوییم هرگاه X متناهی یا شمارای نامتناهی باشد.

مثال. مجموعه‌ی $N_e = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ شمارای نامتناهی است. چون

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow N_e$$
$$f(n) = 2n$$

یک تابع دوسوئی است ولذا $\mathbb{N} \sim N_e$ پس N_e شمارای نامتناهی است.

مثال. مجموعه‌ی $N_o = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ نیز شمارای نامتناهی است. چون

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow N_o$$
$$f(n) = 2n-1$$

دوسوئی است. بنابراین $\mathbb{N} \sim N_o$ ولذا N_o شمارای نامتناهی است.

مثال. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است. برای این منظور فرض کنید

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(r, s) = 2^{r-1}(2s-1)$$

نشان می‌دهیم f دوسوئی است.

الف. f یک به یک است.

$$f(r,s) = f(p,q) \longrightarrow 2^{r-1}(2s-1) = 2^{p-1}(2q-1)$$

$$\longrightarrow \frac{2^{r-1}(2s-1)}{2^{p-1}} = 2q-1 \longrightarrow 2^{r-p}(2s-1) = 2q-1$$

حال از این که سمت راست فرد است لذا سمت چپ نیز فرد است و لذا $2^{r-p} = 1$

یعنی $r = p$.

مثال با قرار دادن $s=5$ و $r=2$ در رابطه‌ی $2^{r-1}(2s-1)=2^{p-1}(2q-1)$ خواهیم داشت $q=5$

یعنی $(p,q)=(r,s)$ و لذا f یک به یک است.

ب. f پوشاست.

فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ دلخواه باشد. در این صورت n قابل نمایش به صورت $n=2^k.t$

است که در آن $k\geq 0$ و t عددی فرد است. قرار می‌دهیم $r=k+1$ و $t=2s-1$

در این صورت $r\geq 1$ و لذا $(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. می‌توان دید

$$f(r,s)=2^{r-1}(2s-1)=2^k.t=n$$

پس f پوشا و در نتیجه دوسوئی است.

پس $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و لذا $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

مسئله. اجتماع هر دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی و جدا از هم، شمارای نامتناهی است.

حل. فرض کنید X و Y شمارای نامتناهی باشند و $X\cap Y=\emptyset$.

$$X\sim\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_e$$
$$Y\sim\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_o$$

$$X\cap Y=\emptyset \quad \text{و} \quad \mathbb{N}_e\cap\mathbb{N}_o=\emptyset$$

$$X\cup Y\sim\mathbb{N}_e\cup\mathbb{N}_o=\mathbb{N}$$

یعنی $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است.

مسئله. ضرب دکارتی هر دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

حل. فرض کنید X و Y شمارای نامتناهی باشند.

$$\begin{array}{l} X \sim \mathbb{N} \\ Y \sim \mathbb{N} \\ \hline X \times Y \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \end{array}$$

بنابراین $X \times Y$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه. اگر X_1، X_2، ...، X_n شمارای نامتناهی باشند آنگاه $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ نیز شمارای نامتناهی است.

اثبات: با استقرا و با استفاده از مسأله قبل حکم نتیجه می‌شود.

توجه: فرض کنید X یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد. در این صورت تابع دوسوئی

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

موجود است. قرار می‌دهیم:

$x_1 = f(1)$، $x_2 = f(2)$، ...

در این صورت به دلیل پوشا بودن f داریم $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

بنابراین هر مجموعه‌ی شمارای نامتناهی توسط $\mathbb{N}$ اندیس‌گذاری می‌شود.

مسأله. نشان دهید $\mathbb{Z}$ (مجموعه‌ی اعداد صحیح) شمارای نامتناهی است.

حل. قبلاً ثابت کردیم که $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. بنابراین $\mathbb{Z}$ نیز شمارای نامتناهی است.

قضیه. هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات. فرض کنید X شمارای نامتناهی باشد و $Y \subseteq X$ نامتناهی باشد.

از این که X شمارای نامتناهی است می‌توان فرض کرد $X=\{x_1,x_2,\dots\}$،

فرض کنید n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1}\in Y$. بوضوح $Y\neq\{x_{n_1}\}$

چون اگر $Y=\{x_{n_1}\}$ آنگاه Y متناهی است. پس $Y-\{x_{n_1}\}\neq\emptyset$.

حال n_2 را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که $x_{n_2}\in Y-\{x_{n_1}\}$. مطمئناً

$Y\neq\{x_{n_1},x_{n_2}\}$. چون اگر $Y=\{x_{n_1},x_{n_2}\}$ آنگاه $Y\sim N_2=\{1,2\}$ و لذا

Y متناهی خواهد بود. پس $Y-\{x_{n_1},x_{n_2}\}\neq\emptyset$ و بنابراین کوچکترین اندیس n_3

چنان موجود است که $x_{n_3}\in Y-\{x_{n_1},x_{n_2}\}$، با استقرا می‌توان دید

در هر مرحله می‌توان کوچکترین اندیس n_k را چنان یافت که

$x_{n_k}\in Y-\{x_{n_1},\dots,x_{n_{k-1}}\}$. اکنون بوضوح $Y=\{x_{n_1},x_{n_2},\dots\}$

یعنی $\mathbb{N}\sim Y$ و لذا Y شمارای نامتناهی است.

مسئله. اگر X شمارای نامتناهی باشد و $x_0\notin X$ آنگاه $X\cup\{x_0\}$ شمارای نامتناهی است.

حل. چون X شمارای نامتناهی است لذا می‌توان فرض کرد $X=\{x_1,x_2,\dots\}$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$f: X\cup\{x_0\}\longrightarrow X$$

$$\{x_0,x_1,\dots\}\qquad\{x_1,x_2,\dots\}$$

$$f(x_i)=x_{i+1}$$

بوضوح f دوسوئی است. پس $X\cup\{x_0\}\sim X$. از طرفی $\mathbb{N}\sim X$. بنابراین

لذا $\sim X\cup\{x_0\}$ و لذا شمارای نامتناهی خواهد بود.

نتیجه. اگر X شمارای نامتناهی باشد و Y متناهی باشد آنگاه $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است.

اثبات. با استفاده از لم قبل و استقرا حکم نتیجه می‌شود.

مسئله. اجتماع هر دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

حل. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشند. بوضوح

$$X\cup Y = X\cup(Y-X)$$

والبته X و $Y-X$ مجزا از هم اند.

اکنون دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف. $Y-X$ متناهی است، در این حالت بنا به نتیجه‌ی قبل، $X\cup(Y-X)$ شمارای نامتناهی است. یعنی $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است.

ب. $Y-X$ نامتناهی است. از این که $Y-X\subseteq Y$ و Y شمارای نامتناهی و $Y-X$ نامتناهی است لذا بنا به یکی از قضایای قبل $Y-X$ شمارای نامتناهی است. اکنون X و $Y-X$ دو مجموعه‌ی مجزا از هم شمارای نامتناهی اند و لذا بنا به یکی از مسائل قبل، اجتماعشان یعنی $X\cup(Y-X)$ شمارای نامتناهی است.

پس $X\cup Y$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه. اجتماع هر تعداد متناهی مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات. مسئله بالا و استقرا حکم را نتیجه می‌دهند.

مسئله. نشان دهید $Q^+=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in \mathbb{N}\}$ شمارای نامتناهی است.

حل. فرض می‌کنیم $Q^+=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{N}, (m,n)=1\}$. حال تعریف می‌کنیم

$$f: Q^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

$$f(\frac{m}{n}) = (m,n)$$

در این صورت به وضوح f یک به یک است. (ولی پوشا نیست) بنابراین

$$f: Q^+ \longrightarrow f(Q^+) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

دوسوئی است. پس $Q^+ \sim f(Q^+)$ و چون Q^+ نامتناهی است

پس $f(Q^+)$ نیز نامتناهی است. حال $f(Q^+)\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است. پس $f(Q^+)$ شمارای نامتناهی و لذا $Q^+\sim f(Q^+)$

مسئله. $Q\sim\mathbb{N}$.

حل. $Q=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$. از این که $Q^+\sim Q^-$ پس Q^- شمارای نامتناهی است و لذا $Q^+\cup Q^-$ شمارای نامتناهی است. بنابراین $Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$ شمارای نامتناهی است. یعنی Q شمارای نامتناهی است.

قضیه: هر مجموعه‌ی نامتناهی شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی است.

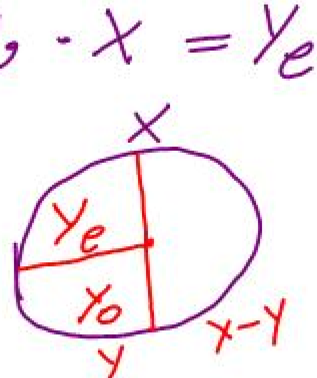
اثبات: فرض کنید X نامتناهی باشد. در این صورت $X\neq\emptyset$. پس $x_1\in X$ موجود است. از این که $\{x_1\}\sim\mathbb{N}_1$ لذا $\{x_1\}$ متناهی است. پس $X\neq\{x_1\}$

در نتیجه $x_2 \in X-\{x_1\}$ موجود است. با ادامه‌ی این فرایند، برای هر k، $x_k \in X-\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$ موجود است. قرار می‌دهیم $Y=\{x_1,x_2,\dots\}$

به وضوح $Y \subseteq X$ و $\mathbb{N} \sim Y$. پس Y یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی از X است.

مثال. نشان دهید هر مجموعه‌ی نامتناهی اجتماعی از دو مجموعه‌ی نامتناهی جدا از هم است.

حل. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. بنا به قضیه‌ی قبل X شامل زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی Y است. می‌توان فرض کرد $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$. قرار می‌دهیم $Y_o=\{y_1,y_3,\dots\}$ و $Y_e=\{y_2,y_4,\dots\}$. به وضوح $\mathbb{N}\sim Y_o$ و $\mathbb{N}\sim Y_e$. پس Y_o و Y_e هر دو شمارای نامتناهی و در نتیجه نامتناهی اند. حال از این که $Y_o \cup (X-Y) = Y'$ ابرمجموعه‌ی Y_o است لذا نامتناهی است. از طرفی $X = Y_e \cup Y'$. واضح است که Y_e و Y' جدا از هم می‌باشند.



یادآوری. هر مجموعه‌ی هم‌توان با $\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی نامیده می‌شود. یک مجموعه‌ی شمارا مجموعه‌ای است که متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. پس یک مجموعه‌ی ناشمارا مجموعه‌ای است که نامتناهی بوده و با $\mathbb{N}$ هم‌توان نباشد.

قضیه: مجموعه‌ی $(0,1)$ شامل تمام اعداد حقیقی x که $0<x<1$ ، ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید $(0,1)$ شمارا باشد. بنابراین می‌توان تمام اعداد این مجموعه را توسط $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد، فرض کنید $(0,1)=\{x_1,x_2,\dots\}$

هر عدد در فاصله‌ی $(0,1)$ دارای نمایش اعشاری به صورت $0/a_1a_2\dots$ است.

اگر عددی دارای نمایش اعشاری متناهی باشد می‌توان آن را با نمایش نامتناهی جایگزین کرد. به عنوان مثال، $0/2 = 0/1999\dots$ ، $0/378 = 0/377\bar{9}$

فرض کنید:

$$x_1 = 0/y_{11}y_{12}y_{13}\dots$$
$$x_2 = 0/y_{21}y_{22}y_{23}\dots$$
$$x_3 = 0/y_{31}y_{32}y_{33}\dots$$

عدد اعشاری $z=0/z_1z_2z_3\dots$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $z_1\neq y_{11}$ ، $z_2\neq y_{22}$ ، $z_3\neq y_{33}$ و ....

به وضوح بنا به انتخاب، $z\neq x_1$ (چون $z_1\neq y_{11}$) به همین صورت $z\neq x_2,x_3,\dots$. پس عددی اعشاری در $(0,1)$ موجود است که در $\{x_1,x_2,\dots\}$ وجود ندارد و این تناقض است.

پس $(0,1)$ ناشمارا است.

مسأله. هر ابرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی ناشمارا، ناشمارا است.

اثبات: فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناشمارا و Y ابرمجموعه‌ی آن باشد یعنی $X \subseteq Y$.
از این که X نامتناهی است لذا Y نیز نامتناهی است،
می‌خواهیم نشان دهیم Y ناشمارا است. فرض کنید (فرض خلف) Y شمارا باشد.
از این که Y نامتناهی است، Y شمارای نامتناهی خواهد بود، چون X زیرمجموعه‌ی
نامتناهی Y است، لذا X نیز شمارای نامتناهی است که با فرض تناقض است.
بنابراین Y ناشمارا است.

مثال: $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

دلیل. $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$. از این که $(0,1)$ ناشمارا است لذا $\mathbb{R}$ نیز ناشمارا خواهد بود.

مسأله. هر مجموعه‌ی هم‌توان با یک مجموعه‌ی ناشمارا، ناشمارا است.

حل. فرض کنید X ناشمارا بوده و $Y \sim X$. ادعا می‌کنیم Y ناشمارا است،
در غیر این صورت (فرض خلف) Y شمارا خواهد بود، پس Y یا متناهی است و یا
شمارای نامتناهی و در هر حال از این که $Y \sim X$، X نیز شمارا خواهد بود که
تناقض است. پس Y نیز ناشمارا است.

مثال. اگر $a<b$ آنگاه (a,b) ناشمارا است.

اثبات. $(0,1) \sim (a,b)$، حال از این که $(0,1)$ ناشمارا است لذا (a,b)
نیز چنین است.

مثال. $(5,7]$ ناشمارا است.

دلیل. $(0,1)\sim(5,7)$. بنابراین $(5,7)$ ناشمارا است. از طرفی $(5,7)\subseteq(5,7]$ ، بنابراین $(5,7]$ نیز ناشمارا خواهد بود.

مسئله. مجموعه‌ی $Q^c=\mathbb{R}-Q$ ناشمارا است.

حل. فرض کنید Q^c شمارا باشد. بنابراین شمارای نامتناهی خواهد بود. از طرفی Q (مجموعه‌ی اعداد گویا) نیز شمارای نامتناهی است، پس اجتماعشان یعنی $\mathbb{R}=Q\cup Q^c$ شمارای نامتناهی خواهد بود که تناقض است. پس Q^c ناشمارا است.

فصل ۶. حساب اعداد اصلی.

می‌دانیم هر عدد طبیعی n مرتبه‌ی یک مجموعه است. عدد صفر نیز این خاصیت را دارد. در واقع صفر مرتبه‌ی مجموعه‌ی تهی است.

یک عدد اصلی به نوعی تعمیم مرتبه است. به عبارت دیگر به هر مجموعه‌ی A اعم از متناهی یا نامتناهی می‌توان یک عدد اصلی a متناظر کرد. در چنین حالتی a را عدد اصلی یا کاردینال A نامیده می‌نویسیم $a=\text{card}(A)$.

به علاوه اصول موضوعه‌ی زیر را فرض می‌گیریم.

① به هر مجموعه‌ی A یک عدد اصلی a متناظر است.

② $\text{card}\,A=0$ اگر و تنها اگر $A=\emptyset$

③ اگر $A\neq\emptyset$ متناهی باشد آنگاه به ازای یک k ، $A\sim N_k=\{1,2,\dots,k\}$ در این صورت $card(A)=k$.

④ برای هر دو مجموعه‌ی A و B ، $card(A)=card(B)$ اگر و تنها اگر $A\sim B$.

نمادگذاری. قرار می‌دهیم $\aleph_0=card(\mathbb{N})$ و $c=card(\mathbb{R})$.

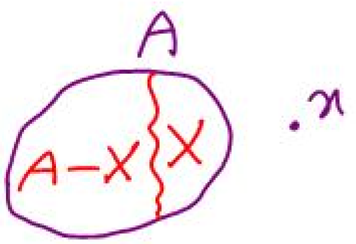
از این که $\mathbb{N}$ شمارا و $\mathbb{R}$ ناشمارا است لذا $\mathbb{R}\not\sim\mathbb{N}$ و در نتیجه بنا بر اصل موضوع ④ $\aleph_0\neq c$.

مثال. اگر X شمارای نامتناهی باشد آنگاه $\mathbb{N}\sim X$ و لذا $card(X)=\aleph_0$.

مسئله. فرض کنید A یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و $x\notin A$. در این صورت $card(A\cup\{x\})=card(A)$.

حل. از این که A نامتناهی است لذا شامل زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی مانند X است. در مسئله‌ای در قبل نشان دادیم اگر $x\notin X$ آنگاه $X\sim X\cup\{x\}$. اکنون

$$X\sim X\cup\{x\}$$
$$A-X\sim A-X$$



$$\underbrace{(A-X)\cup X}_{A}\sim\underbrace{(A-X)\cup(X\cup\{x\})}_{A\cup\{x\}}\longrightarrow A\sim A\cup\{x\}$$

توجه کنید $X\cap(A-X)=\emptyset$ و $(X\cup\{x\})\cap(A-X)=\emptyset$.

ترتیب در اعداد اصلی

مجموعه‌های $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ را در نظر بگیرید. به وضوح $A\subseteq B$ بنابراین $|A|\le|B|$.

سوالی که مطرح است این است که برای هر دو مجموعه $|A|\le|B|$ آیا لازم است $A\subseteq B$؟ جواب منفی است. برای این منظور $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6,7,8\}$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید $A\not\subseteq B$ درحالیکه $|A|=3\le 5=|B|$.

$$A=\{1,2,3\}$$

$$B=\{\underbrace{4,5,6}_{A'},7,8\}$$

چنانچه $A'=\{4,5,6\}$ آنگاه $A\sim A'\subseteq B$.

تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت گوئیم $\operatorname{Card}A\le\operatorname{Card}B$ هرگاه A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌توان باشد. به عبارت دیگر $A'\subseteq B$ چنان موجود باشد که $A\sim A'$.

چنانچه $\operatorname{Card}A\le\operatorname{Card}B$ آنگاه $A'\subseteq B$ وجود دارد که $A\sim A'$. فرض کنید $f:A\to A'$ تابعی دوسوئی باشد. در این صورت $f:A\to B$ یک به یک است.

پس $\operatorname{Card}A\le\operatorname{Card}B$ هرگاه تابع یک به یک $f:A\to B$ موجود باشد.

مثال. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. پس $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} \mathbb{R}$. یعنی $\aleph_0 \leq c$.

تعریف. گوییم $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ هرگاه $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$

مثال. قبلاً نشان دادیم که $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ ناهمتوان است. پس $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ و لذا $\aleph_0 \neq c$.

از طرفی بنا به مثال قبل، $\aleph_0 \leq c$. بنابراین $\aleph_0 < c$.

سؤال. آیا عددی اصلی بین $\aleph_0$ و c موجود است؟

قضیه‌ی شرودر - برنشتاین

اگر A و B دو مجموعه باشند که $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ و $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$ آنگاه $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$،

به عبارت دیگر اگر α و β دو عدد اصلی باشند و $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$.

عدد اصلی مجموعه‌ی توانی

قضیه. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی X باشد. در این صورت $\operatorname{card} X < \operatorname{card} P(X)$.

اثبات، ابتدا فرض کنید $X = \emptyset$. در این صورت بوضوح $P(X) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

بنابراین $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \emptyset = 0 < 1 = \operatorname{card} P(\emptyset)$

پس فرض می‌کنیم $X \neq \emptyset$.

تعریف می‌کنیم

$$\varphi : X \longrightarrow P(X)$$
$$x \rightsquigarrow \{x\}$$

به وضوح φ تابعی یک به یک است. پس $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} P(X)$.

حال می‌خواهیم نشان دهیم $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} P(X)$.

فرض کنید $\operatorname{card} X = \operatorname{card} P(X)$ (فرض خلف). بنابراین تابعی دوسوئی مانند $f : X \longrightarrow P(X)$ موجود است. حال تعریف می‌کنیم:

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subseteq X$$

پس $S \in P(X)$. حال از این‌که f پوشاست لذا $e \in X$ موجود است که $f(e) = S$.

$$e \in S \xrightarrow{\text{بنا به تعریف } S} e \notin f(e) \rightarrow e \notin S$$
$$e \notin S \xrightarrow{\text{بنا به تعریف } S} e \in f(e) \rightarrow e \in S$$
$$\gg \times$$

پس چنین f موجود نیست ولذا $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} P(X)$. پس $\operatorname{card} X < \operatorname{card} P(X)$.

جمع اعداد اصلی.

تعریف. فرض کنید x و y دو عدد اصلی باشند. دراین صورت مجموعه‌ی X و Y را

چنان موجود ندکه $\operatorname{card} X = x$ و $\operatorname{card} Y = y$. می‌توان فرض کرد $X \cap Y = \emptyset$. در این صورت تعریف می‌کنیم $x + y = \operatorname{card}(X \cup Y)$.

نکته ۱. چگونه می‌توان فرض کرد $X \cap Y = \emptyset$ ؟

نکته: پاسخگوئی به سؤال بالا فرض کنید $x = \operatorname{card} X$ و $y = \operatorname{card} Y$. در این صورت به وضوح $X \sim \underbrace{X \times \{1\}}_{X'}$ و $Y \sim \underbrace{Y \times \{2\}}_{Y'}$.

در چنین حالتی $X \sim X'$ و $Y \sim Y'$ والبته $X' \cap Y' = \emptyset$.

نکته ۲. (خوش تعریفی جمع) فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند بطوری که $\operatorname{card} X = x$ و $\operatorname{card} Y = y$

همچنین فرض کنید X' و Y' نیز دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند که $\operatorname{card} X' = x$ و $\operatorname{card} Y' = y$. در این صورت:

$$\operatorname{card} X = x = \operatorname{card} X' \longrightarrow X \sim X'$$
$$\operatorname{card} Y = y = \operatorname{card} Y' \longrightarrow Y \sim Y'$$
$$\frac{X \cap Y = \emptyset = X' \cap Y'}{X \cup Y \sim X' \cup Y'}$$

بنابراین $\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card}(X' \cup Y')$ یعنی جمع اعداد اصلی خوش تعریف است.

مثال: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

$$\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o=\mathbb{N} \rightarrow card(\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o)=card\,\mathbb{N}$$

حال از این که $\mathbb{N}_e \cap \mathbb{N}_o=\phi$ لذا $card(\mathbb{N}_o \cup \mathbb{N}_e)=card\,\mathbb{N}_o+card\,\mathbb{N}_e$

پس $card(\mathbb{N}_o)+card(\mathbb{N}_e)=card(\mathbb{N})$ یعنی $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

مثال: فرض کنید α یک عدد اصلی نامتناهی باشد. در این صورت $\alpha+1=\alpha$.

زیرا فرض کنید مجموعه‌ی A چنان باشد که $card\,A=\alpha$ و $x\notin A$.

در مسئله‌ای از قبل ثابت کردیم که $A\cup\{x\}\sim A$. بنابراین

$card(A\cup\{x\})=card\,A$. یعنی $\alpha+1=\alpha$.

نتیجه: اگر k یک عدد اصلی متناهی و α یک عدد اصلی ترامتناهی باشد

آنگاه $\alpha+k=\alpha$.

مسئله: نشان دهید $c+c=c$

حل:

$$(0,1)\subseteq(0,1)\cup(1,2)$$

$$\rightarrow card(0,1)\leqslant card\big((0,1)\cup(1,2)\big)$$

$$\rightarrow c\leqslant c+c \quad (1)$$

$$(0,1)\cup(1,2)\subseteq\mathbb{R}\rightarrow card\big((0,1)\cup(1,2)\big)\leqslant card\,\mathbb{R}$$

$$\rightarrow c+c\leqslant c \quad (2)$$

اکنون بنا به قضیه‌ی شرودر برنشتاین از روابط ① و ② نتیجه می‌شود $c+c=c$.

مسئله. فرض کنید x، y و z سه عدد اصلی باشند. نشان دهید اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.

حل. مجموعه‌های X، Y و Z چنان موجودند که $\operatorname{card} X = x$، $\operatorname{card} Y = y$ و $\operatorname{card} Z = z$.

از این $x \leq y$ نتیجه می‌شود تابع یک به یک $f: X \to Y$ موجود است، مشابهاً از $y \leq z$ نتیجه می‌شود تابع یک به یک $g: Y \to Z$ وجود دارد.

بوضوح $g \circ f: X \to Z$ نیز یک به یک است و لذا $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Z$. یعنی $x \leq z$.

مسئله، فرض کنید x، y و z اعداد اصلی باشند به طوری که $x \leq y$ و $y < z$، نشان دهید $x < z$.

حل. از این که $y < z$ نتیجه می‌شود $y \leq z$. به علاوه $x \leq y$. بنابراین با توجه به مسئله‌ی قبل، $x \leq z$

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم $x \neq z$.

فرض کنید (فرض خلف) $x = z$ در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \xrightarrow{x=z} z \leq y \\ y < z \longrightarrow y \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow y = z \quad \times$$

پس $x \neq z$ و لذا $x < z$.

مسأله. فرض کنید x ، y و z سه عدد اصلی باشند به طوری که $x \leq y$. نشان دهید $x+z \leq y+z$.

حل. فرض کنید X ، Y و Z مجموعه‌هایی باشند که $\operatorname{card} X = x$ ، $\operatorname{card} Y = y$ و $\operatorname{card} Z = z$. می‌توان فرض کرد $X \cap Z = Y \cap Z = \phi$.

از این که $x \leq y$ لذا تابع یک به یک $f: X \to Y$ موجود است. اکنون تعریف می‌کنیم

$$g: X \cup Z \to Y \cup Z$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ x & x \in Z \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید g یک به یک است. چرا؟

پس $\operatorname{card}(X \cup Z) \leq \operatorname{card}(Y \cup Z)$. یعنی $x+z \leq y+z$.

مثال. نشان دهید $\aleph_0 + c = c$.

حل.

$$0 \leq \aleph_0 \longrightarrow c + 0 \leq c + \aleph_0 \to c \leq c + \aleph_0 \quad (1)$$

$$\aleph_0 \leq c \longrightarrow c + \aleph_0 \leq c + c = c \to c + \aleph_0 \leq c \quad (2)$$

$$(1), (2) \longrightarrow c + \aleph_0 = c$$

توجه کنید: برای هر عدد اصلی x ، $x + 0 = x$. زیرا اگر X چنان باشد که $\operatorname{card} X = x$ آنگاه $X \cup \phi = X$ و لذا $\operatorname{card}(X \cup \phi) = \operatorname{card} X$

یعنی $x + 0 = x$

ضرب اعداد اصلی

تعریف. فرض کنید x و y دو عدد اصلی باشند. اگر X و Y مجموعه‌هایی باشند که $\operatorname{card} X = x$ و $\operatorname{card} Y = y$ آنگاه تعریف می‌کنیم $xy = \operatorname{card}(X \times Y)$.

لم. فرض کنید x، y و z سه عدد اصلی باشند. در این صورت:

الف) $x(yz) = (xy)z$.

ب) $xy = yx$.

اثبات. فرض کنید $\operatorname{card} X = x$، $\operatorname{card} Y = y$ و $\operatorname{card} Z = z$.

الف) $X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z \longrightarrow x(yz) = (xy)z$

ب) تعریف می‌کنیم

$$f : X \times Y \longrightarrow Y \times X$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (y, x)$$

به وضوح f دوسویی است. بنابراین $X \times Y \sim Y \times X$ و لذا $xy = yx$.

لم. فرض کنید x، y و z سه عدد اصلی باشند. در این صورت:

$$x(y+z) = xy + xz$$

اثبات. فرض کنید $\operatorname{card} X = x$، $\operatorname{card} Y = y$ و $\operatorname{card} Z = z$.

می‌توان فرض کرد $Y \cap Z = \phi$. همچنین

$$(X \times Y) \cap (X \times Z) = X \times (Y \cap Z) = X \times \phi = \phi$$

اکنون $X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$

بنابراین $\operatorname{card}(X\times(Y\cup Z))=\operatorname{card}((X\times Y)\cup(X\times Z))$

پس $x(y+z)=xy+xz$.

مسئله. فرض کنید x، y و z اعداد اصلی باشند به طوری که $x\le y$. نشان دهید $xz\le yz$.

حل. فرض کنید X، Y و Z چنان باشند که $\operatorname{card}X=x$، $\operatorname{card}Y=y$ و $\operatorname{card}Z=z$.

از این که $x\le y$ لذا تابع یک به یک $f:X\longrightarrow Y$ موجود است.

اکنون تعریف می‌کنیم: $g:X\times Z\longrightarrow Y\times Z$

$$g(x,z)=(f(x),z)$$

به راحتی می‌توان دید g یک به یک است. بنابراین $\operatorname{card}(X\times Z)\le\operatorname{card}(Y\times Z)$

یعنی $xz\le yz$.

مسئله. نشان دهید $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

حل. قبلاً ثابت کردیم $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. بنابراین $\operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=\operatorname{card}\mathbb{N}$

یعنی $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

مثال. نشان دهید برای هر عدد اصلی n، $2n = n + n$.

حل. فرض کنید X چنان باشد که $\text{card}\, X = n$. در این صورت:

$$\{1,2\} \times X = \{(a,x) \mid a \in \{1,2\} \text{ و } x \in X\}$$

$$= \{(1,x) \mid x \in X\} \cup \{(2,x) \mid x \in X\}$$

پس کاردینال دو طرف برابر است. یعنی $2n = n + n$.

مسأله. نشان دهید $cc = c$.

حل.

$$1 \leq c \longrightarrow 1c \leq cc \longrightarrow c \leq cc$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم $cc \leq c$. برای این منظور تعریف می‌کنیم

$$f : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$$

$$f(0/x_1x_2\cdots \text{ و } 0/y_1y_2\cdots) = 0/x_1y_1x_2y_2\cdots$$

به وضوح f یک تابع است. بعلاوه f یک به یک است. چون:

$$f(0/x_1x_2\cdots, 0/y_1y_2\cdots) = f(0/z_1z_2\cdots, 0/t_1t_2\cdots)$$

$$\longrightarrow 0/x_1y_1x_2y_2\cdots = 0/z_1t_1z_2t_2\cdots$$

$$\longrightarrow \forall i \quad x_i = z_i \;,\; y_i = t_i$$

$\rightarrow 0/x_1x_2\cdots = 0/z_1z_2\cdots$ و $0/y_1y_2\cdots = 0/t_1t_2\cdots$

یعنی $(0/x_1x_2\cdots, 0/y_1y_2\cdots) = (0/z_1z_2\cdots, 0/t_1t_2\cdots)$

پس f یک به یک است و لذا $\operatorname{card}((0,1)\times(0,1)) \leqslant \operatorname{card}(0,1)$

یعنی $cc \leqslant c$.

پس $cc = c$ و حکم ثابت می‌شود.

مسئله. نشان دهید $c\aleph_0 = c$.

حل. $1 \leqslant \aleph_0 \leqslant c \longrightarrow \underbrace{c1}_{c} \leqslant c\aleph_0 \leqslant \underbrace{cc}_{c}$

حال بنا به قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین حکم نتیجه می‌شود.

توان اعداد اصلی.

سئوال، فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی با مرتبه‌های به ترتیب m و n باشند، چند تابع $f: A \longrightarrow B$ وجود دارد؟

جواب، فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

$f(a_1) \in B$. بنابراین n انتخاب برای $f(a_1)$ وجود دارد، به همین صورت

برای $f(a_2)$، ...، $f(a_m)$ هر کدام n انتخاب وجود دارد،

بنابراین تعداد توابع $f: A \longrightarrow B$ برابر است با $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ بار}} = n^m$

یعنی تعداد توابع $f: A \longrightarrow B$ برابر است با $|B|^{|A|}$.

از ایده‌ی سؤال بالا استفاده کرده و توان اعداد اصلی را تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$Y^X = \{ f : X \longrightarrow Y \mid \text{ تابع است } f \}$$

تعریف. فرض کنید x و y دو عدد اصلی باشند. اگر X و Y چنان باشند که $\operatorname{card} X = x$ و $\operatorname{card} Y = y$ آنگاه تعریف می‌کنیم $y^x = \operatorname{card}(Y^X)$

توجه کنید چنانچه x و y اعداد اصلی متناهی باشند آنگاه y^x با توان اعداد که از قبل می‌شناسیم مطابقت دارد.

مسأله. نشان دهید برای هر عدد اصلی x ، $1^x = 1$.

حل. فرض کنید مجموعه‌ی X چنان باشد که $\operatorname{card} X = x$ و $A = \{a\}$

$$A^X = \{ f : X \longrightarrow A \mid \text{ تابع است } f \}$$

به وضوح برای هر $x \in X$ ، $f(x) = a$. پس $\operatorname{card}(A^X) = 1$. یعنی $1^x = 1$ و حکم ثابت می‌شود.

مسأله. نشان دهید برای هر عدد اصلی y ، $y^0 = 1$.

حل. فرض کنید مجموعه‌ی Y چنان باشد که $\operatorname{card} Y = y$.

بنابراین $y^0 = card(Y^{\phi})$. لذا

$$Y^{\phi} = \{f : \phi \longrightarrow Y\}$$

کافی است تعداد توابع $f : \phi \to Y$ را بیابیم.

می‌دانیم یک رابطه از ϕ به Y زیرمجموعه‌ای از $\phi \times Y = \phi$ است،
پس تنها یک رابطه از ϕ به Y وجود دارد. بنا به انتفای مقدم، این رابطه
یک تابع نیز می‌باشد. پس تنها یک تابع از ϕ به Y وجود دارد و لذا

$$y^0 = card(Y^{\phi}) = 1$$

قضیه. فرض کنید a ، x و y اعداد اصلی باشند. در این صورت

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

اثبات. فرض کنید X، Y و A مجموعه‌هایی باشند که $card X = x$ ، $card Y = y$
و $card A = a$. به علاوه فرض کنید $X \cap Y = \phi$. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\varphi : A^X \times A^Y \longrightarrow A^{X \cup Y}$$

$$\varphi(f, g) = f \cup g : X \cup Y \longrightarrow A$$

$$f \cup g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in Y \end{cases}$$

توجه کنید: از این که $f : X \longrightarrow A$ لذا $f \in A^X$ و از این که
$g : Y \longrightarrow A$ بنابراین $g \in A^Y$ است.

الف. φ خوش تعریف است، به عبارت دیگر باید نشان دهیم
اگر $f: X \to A$ و $g: Y \to A$ توابع باشند آنگاه

$$f \cup g : X \cup Y \to A$$

$$f \cup g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in Y \end{cases}$$

نیز یک تابع است.

از این که $f: X \to A$ یک تابع است لذا f رابطه‌ای از X به A است، یعنی $f \subseteq X \times A$. مشابهاً $g \subseteq Y \times A$. بنابراین

$$f \cup g \subseteq (X \times A) \cup (Y \times A) = (X \cup Y) \times A$$

پس $f \cup g$ رابطه‌ای از $X \cup Y$ به A است.

به علاوه:

$$Dom(f \cup g) = (\underbrace{Dom f}_{X}) \cup (\underbrace{Dom g}_{Y}) = X \cup Y$$

اینک فرض کنید $(t, b_1), (t, b_2) \in f \cup g$. حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

① $(t, b_1), (t, b_2) \in f$ که از تابع بودن f نتیجه می‌شود $b_1 = b_2$.

② $(t, b_1), (t, b_2) \in g$ که از تابع بودن g نتیجه می‌شود $b_1 = b_2$.

③ $(t, b_1) \in f$ و $(t, b_2) \in g$، در این حالت $t \in Dom f = X$

و $t \in Dom g = Y$. پس $t \in X \cap Y = \varnothing$ $\cancel{X}$. پس حالت ③

رخ نمی‌دهد. بنابراین تاکنون نشان داده‌ایم:

$f\cup g: X\cup Y \longrightarrow A$ یک تابع است و لذا φ خوش تعریف است،

ب. φ یک به یک است، برای این منظور کنید $\varphi(f,g)=\varphi(f',g')$

یعنی $f\cup g = f'\cup g'$،

اکنون برای هر $x\in X$،

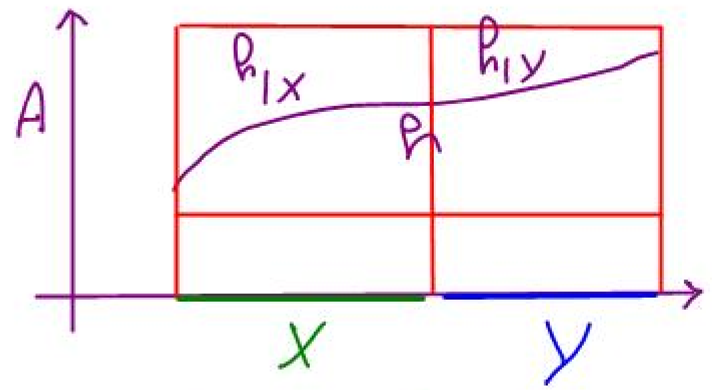
$$f\cup g(x) = f'\cup g'(x) \longrightarrow f(x)=f'(x)$$

یعنی اثر f و f' روی هر عنصر دامنه شان یعنی X برابر است. پس $f=f'$.

مشابهاً $g=g'$ و لذا $(f,g)=(f',g')$. پس φ یک به یک است.

ج. φ پوشاست. فرض کنید $h\in A^{X\cup Y}$. بنابراین $h: X\cup Y\to A$

یک تابع است.



حال قرار می دهیم $f=h|_X$ و $g=h|_Y$.

به وضوح $h=f\cup g$. یعنی $\varphi(f,g)=f\cup g=h$

پس $\varphi: A^X\times A^Y \longrightarrow A^{X\cup Y}$ دوسوئی است و لذا

$\mathrm{card}(A^X\times A^Y)=\mathrm{card}(A^{X\cup Y})$. پس $a^x a^y = a^{x+y}$.

قضیه. برای اعداد اصلی a ، b و x ،

$$(ab)^x = a^x b^x$$

اثبات. فرض کنید A ، B و X مجموعه‌هایی باشند که $\operatorname{card} A = a$ ، $\operatorname{card} B = b$ و $\operatorname{card} X = x$. تعریف می‌کنیم

$$\varphi : (A \times B)^X \longrightarrow A^X \times B^X$$

$$\varphi(f) = (\pi_A \circ f , \pi_B \circ f)$$

که در آن
$$\pi_A : A \times B \longrightarrow A, \quad (a,b) \rightsquigarrow a$$
و
$$\pi_B : A \times B \longrightarrow B, \quad (a,b) \rightsquigarrow b$$
توابع تصویر می‌باشند.

الف. φ خوش‌تعریف است.

اگر $f \in (A \times B)^X$ آنگاه $f : X \to A \times B$. همچنین $\pi_A : A \times B \to A$. پس

$$\pi_A \circ f : X \xrightarrow{f} A \times B \xrightarrow{\pi_A} A$$

ولذا $\pi_A \circ f \in A^X$. به طور مشابه $\pi_B \circ f \in B^X$ ولذا φ خوش‌تعریف است.

ب. φ یک به یک است. برای این منظور فرض کنید $\varphi(f) = \varphi(g)$ و $x \in X$ را دلخواه می‌گیریم. فرض کنید $f(x) = (a,b)$ و $g(x) = (a',b')$.

$$\varphi(f)=\varphi(g) \longrightarrow (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f) = (\pi_A \circ g, \pi_B \circ g)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \pi_A \circ f = \pi_A \circ g & ① \\ \pi_B \circ f = \pi_B \circ g & ② \end{cases}$$

$$① \longrightarrow \pi_A \circ f(x) = \pi_A \circ g(x) \longrightarrow \pi_A(f(x)) = \pi_A(g(x))$$

$$\longrightarrow \pi_A(a,b) = \pi_A(a',b') \longrightarrow a = a'$$

$② \longrightarrow b = b'$ بطور مشابه

پس $(a,b)=(a',b')$ یعنی $f(x)=g(x)$ و چون x دلخواه بود لذا

$f=g$. و این نشان می‌دهد که φ یک به یک است ،

ج . φ پوشاست . برای این منظور فرض کنید $(g,h) \in A^X \times B^X$ دلخواه

باشد. بنابراین $g: X \to A$ و $h: X \to B$ (دو تابع) می‌باشند ،

حال قرار می‌دهیم : $f: X \to A \times B$. در این صورت :

$$f(x) = (g(x), h(x))$$

$$\pi_A \circ f(x) = \pi_A(f(x)) = \pi_A(g(x), h(x)) = g(x)$$

$$\pi_B \circ f(x) = \pi_B(f(x)) = \pi_B(g(x), h(x)) = h(x)$$

پس $\pi_A \circ f = g$ و $\pi_B \circ f = h$. اکنون

$$\varphi(f) = (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f) = (g, h)$$

ولذا φ پوشاست.

پس $\varphi : (A \times B)^X \longrightarrow A^X \times B^X$ دوسویی است و در نتیجه

$\mathrm{Card}(A \times B)^X = \mathrm{Card}(A^X \times B^X)$. یعنی $(ab)^x = a^x b^x$.

قضیه. فرض کنید x، y و z سه عدد اصلی باشند. در این صورت

$$(z^y)^x = z^{yx}$$

معرفی تابع مشخصه.

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

مثال. فرض کنید $A = \{1, 3, 5\}$ و $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. در این صورت

$$\chi_A(1) = 1,\ \chi_A(2) = 0,\ \chi_A(3) = 1,\ \chi_A(4) = 0,\ \chi_A(5) = 1$$

تمرین. ۱) نشان دهید χ_A پوشاست اگر و تنها اگر $\emptyset \neq A \subsetneq X$.

۲) شرطی لازم و کافی چنان بیابید که χ_A یک به یک باشد.

تعریف. برای هر مجموعه‌ی X تعریف می‌کنیم

$$2^X = \{ f : X \longrightarrow \{0,1\} \mid \text{تابع است } f \}$$

با توجه به تعریف توان به راحتی می‌توان دید $card(2^X) = 2^{card X}$.

مسأله. فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی آن باشد. نشان دهید

$$card(P(X)) = card(2^X)$$

حل. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi : P(X) \longrightarrow 2^X$$

$$\varphi(A) = \chi_A$$

به وضوح φ خوش تعریف است. به علاوه،

الف. φ یک به یک است،

برای این منظور فرض کنید $\varphi(A) = \varphi(B)$. در این صورت $\chi_A = \chi_B$

می‌خواهیم نشان دهیم $A = B$.

$$x \in A \longrightarrow \chi_A(x) = 1 \xrightarrow{\chi_A = \chi_B} \chi_B(x) = 1 \longrightarrow x \in B$$

پس $A \subseteq B$. به طور مشابه $B \subseteq A$ و لذا $A = B$. پس φ یک به یک است.

ب. φ پوشاست.

فرض کنید $f \in 2^X$. بنابراین $f : X \to \{0,1\}$ یک تابع است. قرار می‌دهیم

$$A = f^{-1}(1) = \{ x \in X \mid f(x) = 1 \}$$

در این صورت برای هر $x \in A$، $f(x)=1$ و اگر $x \notin A$ آنگاه $f(x) \neq 1$

و لذا $f(x)=0$. پس $f = \chi_A$ و لذا $\varphi(A) = \chi_A = f$. پس

φ پوشاست.

بنابراین φ دوسوئی است و لذا $card(P(X)) = card(2^X)$.

نتیجه. برای هر عدد اصلی x، $x < 2^x$.

اثبات. فرض کنید X مجموعه‌ای باشد که $card X = x$. در این صورت بنا به

مسئله‌ی بالا $card(P(X)) = card(2^X) = 2^x$.

از طرفی قبلاً در قضیه‌ای ثابت کردیم که $card(X) < card(P(X))$.

بنابراین $x < 2^x$.

مسئله. نشان دهید $c = 2^{\aleph_0}$.

اثبات. ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$f : R \longrightarrow P(Q)$$
$$f(a) = \{x \in Q \mid x < a\} = (-\infty, a) \cap Q$$

به وضوح f خوش تعریف است. به علاوه f یک به یک است. زیرا

فرض کنید $a \neq b$. بدون وارد آمدن خللی به کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a < b$.

در این صورت عدد گویای r موجود است که $a<r<b$. اکنون به وضوح
$r\in(-\infty,b)\cap\mathbb{Q}$ ولی $r\notin(-\infty,a)\cap\mathbb{Q}$
پس $f(a)\neq f(b)$. بنابراین f یک به یک است و لذا $card(\mathbb{R})\leq card(P(\mathbb{Q}))$
یعنی $c\leq 2^{\aleph_0}$. (1)
اکنون تعریف می‌کنیم

$$\varphi: 2^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$\varphi(f)=0/f(1)f(2)f(3)\ldots$$

در این صورت φ خوش تعریف است. به علاوه φ یک به یک است،
برای این منظور فرض کنید $\varphi(f)=\varphi(g)$. در این صورت
$0/f(1)f(2)f(3)\ldots=0/g(1)g(2)g(3)\ldots$. بنابراین $f(1)=g(1)$ ،
$f(2)=g(2)$ و ... . به عبارت دیگر برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $f(n)=g(n)$ و در نتیجه
$f=g$. پس φ یک به یک است و در نتیجه $card(2^{\mathbb{N}})\leq card(\mathbb{R})$.
یعنی $2^{\aleph_0}\leq c$. (2)
اکنون از روابط (1) و (2) نتیجه می‌شود $c=2^{\aleph_0}$.

نتیجه. $\aleph_0<c$.

اثبات. قبلاً ثابت کردیم برای هر عدد اصلی x ، $x<2^x$. بنابراین
$\aleph_0<2^{\aleph_0}=c$.

مسأله. نشان دهید $cc = c$.

حل.

$$cc = 2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

تمرین. فرض کنید a، b، x و y اعداد اصلی باشند به طوری که $a \leq b$ و $0 < x \leq y$. نشان دهید:

الف. $a^x \leq b^x$

ب. $b^x \leq b^y$

ج. $a^x \leq b^y$

مسأله. نشان دهید $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

حل.

$$2 \leq \aleph_0 \leq 2^{\aleph_0} \longrightarrow 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$$

$$\longrightarrow c \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

پس $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

مسأله. نشان دهید $c^c = 2^c$.

حل.

$$2 \leq c \leq 2^c \longrightarrow 2^c \leq c^c \leq (2^c)^c = 2^{cc} = 2^c$$

پس $c^c = 2^c$.

مسأله. ثابت کنید $c^{\aleph_0} = c$.

حل.

$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

اصل انتخاب و صورت‌های هم‌ارز آن

اصل انتخاب. فرض کنید $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی و دو به دو مجزا باشد. در این صورت تابع

$$f : \{A_i \mid i \in I\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

موجود است به طوری که برای هر i، $f(A_i) \in A_i$.

تابع f را تابع انتخاب می‌نامیم.

توضیح. فرض کنید در توصیف بالا، برای هر i، $f(A_i) = a_i \in A_i$ و این بدین معنی است که از هر A_i توانسته‌ایم دقیقاً یک عنصر انتخاب کنیم.

حال اگر قرار دهیم $A = \{a_i \mid i \in I\}$ آنگاه برای هر i، $A_i \cap A = \{a_i\}$.

مسئله. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پوشا باشد. نشان دهید $A \subseteq X$ چنان موجود است که $f|_A : A \longrightarrow Y$ دوسوئی باشد.

حل. برای هر $y \in Y$ قرار می‌دهیم $A_y = f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

بوضوح $\{A_y \mid y \in Y\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزاست و از این که f پوشاست، برای هر y، $A_y \neq \emptyset$،

اکنون بنا به اصل انتخاب تابع انتخاب $g : \{A_y \mid y \in Y\} \longrightarrow \bigcup_{y \in Y} A_y = X$

موجود است که در آن برای هر y، $g(A_y) = a_y \in A_y = f^{-1}(y)$ یعنی

$g(a_y)=y$. حال قرار می‌دهیم $A=\{a_y \mid y\in Y\}$. در این صورت

$A\subseteq \bigcup_{y\in Y} A_y = X$ و به وضوح $f|_A : A \longrightarrow Y$ دوسویی است.

تعریف. فرض کنید A یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه روی A باشد:

$\leqslant$ را روی A انعکاسی گوئیم هرگاه برای هر $a\in A$، $a\leqslant a$.

$\leqslant$ را روی A متعدی گوئیم هرگاه برای هر $a,b,c\in A$،

$$a\leqslant b,\ b\leqslant c \longrightarrow a\leqslant c$$

$\leqslant$ را روی A پادتقارنی گوئیم هرگاه برای هر $a,b\in A$،

$$a\leqslant b,\ b\leqslant a \longrightarrow a=b$$

رابطه‌ی $\leqslant$ را روی A یک رابطه‌ی ترتیب جزئی گوئیم هرگاه انعکاسی، متعدی و پادتقارنی باشد. در چنین حالتی نیز می‌گوئیم $(A,\leqslant)$ جزئاً مرتب است.

مثال. مجموعه‌ی اعداد صحیح با رابطه‌ی $\leqslant$ معمولی جزئاً مرتب است. زیرا

الف) $\forall a\in\mathbb{Z}\quad a\leqslant a$

ب) $a\leqslant b,\ b\leqslant c \longrightarrow a\leqslant c$

ج) $a\leqslant b,\ b\leqslant a \longrightarrow a=b$

توجه کنید که رابطه‌ی $\leqslant$ لزوماً رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی نیست. اما معمولاً از این نماد برای یک رابطه‌ی ترتیب جزئی استفاده می‌شود.

مثال. فرض کنید | رابطه‌ی عادکردن باشد. در این صورت $(\mathbb{N}, |)$ جزئاً مرتب است. زیرا

الف. برای هر $a\in\mathbb{N}$، $a|a$.

ب. فرض کنید $a|b$ و $b|c$. در این صورت اعداد طبیعی m و n موجودند که $b=na$ و $c=mb$. حال:

$$c=mb=m(na)=(mn)a$$

بنابراین $a|c$.

ج. فرض کنید $a|b$ و $b|a$. بنابراین به ازای اعداد طبیعی m و n، $b=na$ و $a=mb$. حال

$$a=mb=m(na)=mna$$

بنابراین $mn=1$ و درنتیجه $m=n=1$. یعنی $a=b$.

پس رابطه‌ی عادکردن روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است.

توجه. رابطه‌ی عادکردن روی $\mathbb{Z}$، ترتیب جزئی نیست. چون به عنوان مثال $2|-2$ و $-2|2$. درحالی که $2\neq -2$. بنابراین رابطه‌ی عادکردن روی $\mathbb{Z}$ پادتقارنی و لذا ترتیب جزئی نیست.

همان‌گونه که می‌دانیم رابطه‌ی $\geq$ معمولی روی $\mathbb{Z}$ ترتیب جزئی است. به علاوه

هر دو عدد صحیح توسط رابطه‌ی $\leq$ قابل مقایسه اند. یعنی برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$، یکی از روابط $a \leq b$ یا $b \leq a$ برقرار است. به چنین روابطی ترتیب کلی می‌گوییم

تعریف. فرض کنید $(A, \leq)$ یک رابطه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت $(A, \leq)$ را کلاً مرتب یا مرتب کلی می‌نامیم هرگاه، برای هر $a, b \in A$، $a \leq b$ یا $b \leq a$.

مثال. همان گونه که بیان شد $(\mathbb{Z}, \leq)$ مرتب کلی است.

مثال. $(\mathbb{N}, |)$ مرتب کلی نیست. چون $۳ \nmid ۲$ و $۲ \nmid ۳$.

مثال. فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ به همراه رابطه‌ی شمول $\subseteq$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است ولی لزوماً کلاً مرتب نیست.

زیرا:

الف. برای هر $A \in \mathcal{A}$، $A \subseteq A$.

ب. برای هر $A, B, C \in \mathcal{A}$،

$$A \subseteq B, B \subseteq C \longrightarrow A \subseteq C$$

ج. برای هر $A, B \in \mathcal{A}$،

$$A \subseteq B, B \subseteq A \longrightarrow A = B$$

اما رابطه‌ی $\subseteq$ روی مجموعه‌ها لزوماً دارای خاصیت ترتیب کلی نیست. برای این منظور فرض کنید $A = \{1\}$، $B = \{2\}$ و $\mathcal{A} = \{A, B\}$. در این صورت به وضوح $A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq A$.